



Available online at [www.sciencedirect.com](http://www.sciencedirect.com)



International Journal of Thermal Sciences 42 (2003) 1115–1128

International  
Journal of  
Thermal  
Sciences

[www.elsevier.com/locate/ijts](http://www.elsevier.com/locate/ijts)

## Évaporation en convection forcée d'un film liquide mince ostwaldien ruisselant en régime laminaire permanent sur une surface plane isotherme et inclinée

## Evaporation in forced convection of an Ostwaldian permanent laminar film flowing over an isothermal inclined plane surface

Salah Saouli<sup>a</sup>, Mourad Boumaza<sup>b</sup>, Michel Daguenet<sup>c,\*</sup>

<sup>a</sup> Laboratoire de valorisation et promotion des ressources sahariennes, faculté des sciences et des sciences de l'ingénieur, Université de Ouargla, route de Ghardaïa, Ouargla, 30000, Algérie

<sup>b</sup> Institut de génie climatique, faculté des sciences de l'ingénieur, Université de Mentouri, route de Ain-El Bey, Constantine, 25000, Algérie

<sup>c</sup> Laboratoire de thermodynamique et énergétique, Université de Perpignan, 52, avenue de Villeneuve, 66860 Perpignan cedex, France

Reçu le 21 mars 2002 ; accepté le 21 mars 2003

### Résumé

Les auteurs étudient l'évaporation en convection forcée d'un film ostwaldien ruisselant sur une surface plane isotherme et inclinée afin de déterminer l'influence de l'indice de comportement du liquide sur les caractéristiques dynamiques et thermiques du système liquide-air. L'écoulement du film liquide est partiellement bidimensionnel tandis que celui de l'air est bidimensionnel. Les équations et les conditions d'interface couplées sont résolues par une méthode aux différences finies implicite. Il ressort de leur étude que l'indice de comportement influe énormément sur les transferts de chaleur et de masse et que ces transferts sont plus importants pour les liquides pseudoplastiques que pour les liquides dilatants.

© 2003 Éditions scientifiques et médicales Elsevier SAS. Tous droits réservés.

### Abstract

The authors study, in forced convection, the evaporation of an Ostwaldian film flowing over an isothermal inclined plane surface to determine the influence of the behaviour index of the liquid on the dynamic and thermal characteristics of liquid-air system. The liquid flow is considered partially two-dimensional whereas for the air it is two-dimensional. The coupled equations with the interfacial conditions are solved using a fully implicit finite differences method. From the study, it appears that the behaviour index influences considerably the transfers which are more important for pseudoplastic liquids than for dilatant ones.

© 2003 Éditions scientifiques et médicales Elsevier SAS. Tous droits réservés.

*Mots-clés :* Évaporation ; Film mince ; Fluide ostwaldien ; Convection forcée ; Transferts de chaleur et de masse

*Keywords:* Evaporation; Thin film; Ostwaldian fluid; Forced convection; Heat and mass transfer

### 1. Introduction

L'évaporation des films liquides minces en mouvement présente un grand intérêt théorique et pratique. Elle inter-

vient dans de nombreux processus industriels, notamment dans la concentration des effluents, le refroidissement des aubes des turbines, lors de l'injection de carburant dans les moteurs et la distillation. Compte tenu de son importance, l'évaporation d'un film liquide en présence d'un gaz a suscité de nombreux travaux théoriques et expérimentaux. Shembarkar et Pai [1] ont traité le transfert de chaleur et de masse lors de la protection d'une surface exposée à un écoulement turbulent d'air chaud par l'injection d'un film liquide

\* Auteur correspondant.

Adresses e-mail : sveralgk@yahoo.fr (S. Saouli),  
boumaza\_m@hotmail.com (M. Boumaza), daguenet@gala.univ-perp.fr  
(M. Daguenet).

## Nomenclature

$C_f$	coefficient de frottement	$Re_G$	nombre de Reynolds dans la phase gazeuse
$C_p$	capacité calorifique massique à pression constante .....	$Re_{L0}$	nombre de Reynolds dans la phase liquide à l'entrée
$D_V$	coefficient de diffusion de la vapeur dans l'air .....	$Re_L$	nombre de Reynolds généralisé dans la phase liquide
$Fr$	nombre de Froude	$Sc$	nombre de Schmidt dans la phase gazeuse
$g$	accélération de la pesanteur .....	$Sh_x$	nombre de Sherwood local
$h$	chaleur latente massique d'évaporation .....	$T$	température, $= (T_P - T_\infty)T^* + T_\infty$ .....
$H$	chaleur latente massique d'évaporation adimensionnelle	$U$	K composante longitudinale de la vitesse, $= U_\infty U^*$ .....
$i$	numéro des nœuds dans la direction longitudinale	$V$	m·s <sup>-1</sup> composante transversale de la vitesse, $= U_\infty V^*/\sqrt{Re_G}$ .....
$j$	numéro des nœuds dans la direction transversale dans la phase gazeuse	$W$	m·s <sup>-1</sup> fraction massique de la vapeur, $= (W_P - W_\infty)W^* + W_\infty$
$k$	numéro des nœuds dans la direction transversale dans la phase liquide	$x$	m coordonnée longitudinale, $= LX^*$ .....
$K$	coefficient de consistance du liquide .....	$y$	m coordonnée transversale, $= Ly^*/\sqrt{Re_G}$ .....
$L$	longueur de la plaque .....	<i>Symboles grecs</i>	
$\dot{m}$	densité du flux de vapeur .....	$\delta_L$	épaisseur du film liquide, $= L\delta^*/\sqrt{Re_G}$ .....
$Mr$	taux d'évaporation adimensionnel	$\Delta T$	m différence de température, $= T_P - T_\infty$ .....
$M_a$	masse molaire de l'air .....	$\Delta X^*$	pas dans la direction longitudinale
$M_V$	masse molaire de la vapeur .....	$\Delta \eta_L$	pas dans la direction transversale dans la phase liquide
$n$	indice de comportement du liquide	$\Delta \eta_{Gj}$	pas dans la direction transversale dans la phase gazeuse
$N_G$	nombre total de nœuds dans la phase gazeuse suivant la direction transversale	$\eta$	coordonnée transversale adimensionnelle
$N_L$	nombre total de nœuds dans la phase liquide suivant la direction transversale	$\lambda$	conductivité thermique .....
$N_X$	nombre total de nœuds suivant la direction longitudinale	$\mu$	$\text{W} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$
$Nu_L$	nombre de Nusselt local relatif au transfert de chaleur latente	$\mu_a$	viscosité dynamique .....
$Nus$	nombre de Nusselt local relatif au transfert de chaleur sensible	$\nu$	viscosité apparente .....
$O$	origine du système de coordonnées	$\theta$	viscosité cinématique .....
$P$	pression atmosphérique .....	$\rho$	radians inclinaison de la plaque .....
$P_{VS}$	pression de vapeur saturante .....	$\tau$	masse volumique .....
$Pr_L$	nombre de Prandtl généralisé dans la phase liquide	<i>Indices</i>	
$Pr_G$	nombre de Prandtl dans la phase gazeuse	$G$	phase gazeuse
$Q_0$	débit initial du liquide .....	$I$	interface
$Q_0^*$	débit adimensionnel du liquide	$L$	phase liquide
		$P$	paroi
		$0$	initial
		$\infty$	infini
		<i>Exposant</i>	
		*	valeur adimensionnelle

qui s'évapore. Chow et Chung [2] ont étudié l'évaporation d'une nappe d'eau dans un courant d'air, d'air humide et de vapeur surchauffée, tandis que Suzuki et al. [3] ont examiné l'influence des ondes surfaciques sur le transfert de masse et de chaleur dans les systèmes diphasiques. Le cas de l'évaporation d'un film mince liquide dans l'air en convection libre a été traité par Yan et Lin [4] qui ont étudié numéri-

quement l'évaporation d'un film d'éthanol ruisselant sur des parois verticales parallèles. Les systèmes binaires liquides ont été particulièrement analysés par Baumann et Thiele [5] qui ont considéré un écoulement d'air humide turbulent et un film liquide en écoulement de Couette. Agunaoun et al. [6] ont proposé un modèle bidimensionnel de l'évaporation d'un film mince d'eau sur un plan incliné isotherme. Ils montrent

notamment que l'interface se comporte comme une paroi solide isotherme de température voisine de celle de la paroi. En régime turbulent, Yan et Soong [7] ont étudié l'évaporation d'un film liquide en présence d'un courant d'air humide en utilisant le modèle de Van Driest pour le film liquide et le modèle  $k-\epsilon$  pour l'air. Les influences de l'inclinaison de la plaque et du débit initial sur les transferts de chaleur et de masse d'un film liquide sur une plaque isotherme ou à flux de chaleur imposé, ont été examinées par Mezaache et Daguennet [8,9]. Dans tous ces travaux, le film liquide, en l'occurrence de l'eau, est considéré comme newtonien. Cependant, il existe beaucoup de liquides non-newtoniens susceptibles de s'évaporer.

Le présent travail étudie l'évaporation en convection forcée d'un film liquide mince non-newtonien, et notamment l'influence de l'indice de comportement de ce film sur les caractéristiques dynamiques et thermiques le long de la paroi.

## 2. Modèle physique et hypothèses simplificatrices

Considérons un film liquide non-newtonien s'écoulant par gravité sur une surface plane isotherme, de température  $T_P$ , de longueur  $L$ , et inclinée d'un angle  $\theta$  par rapport au plan horizontal. En amont de la plaque, on suppose que le film liquide arrive avec une épaisseur  $\delta_{L0}$ , une vitesse  $U_{L0}(y)$  et une température uniforme  $T_{L0}$ . La surface supérieure de ce film est en contact direct avec un écoulement d'air humide, caractérisé par la vitesse  $U_\infty$ , la température  $T_\infty$  et la fraction massique de vapeur  $W_\infty$ .

La chaleur est transférée à travers le film liquide à l'air, ce qui provoque l'échauffement et l'évaporation du film liquide de sorte qu'un échange de chaleur et de masse se produit au niveau de l'interface liquide-gaz. La Fig. 1 présente un

schéma du système. Posons les hypothèses simplificatrices suivantes :

- (i) l'écoulement du film liquide est laminaire et sans ondes [1–5];
- (ii) les termes d'inertie dans l'équation du mouvement du film liquide sont négligeables comparés aux termes de diffusion, les gradients longitudinaux de la vitesse et la température sont très petits devant ceux dans la direction transversale [4,5,7];
- (iii) l'écoulement gazeux s'effectue en couche limite bidimensionnelle, laminaire et incompressible, alors que les propriétés thermophysiques du liquide et de l'air humide (considéré comme un gaz parfait) sont constantes;
- (iv) les effets Soret et Dufour sont négligeables, ainsi que la tension superficielle, la dissipation visqueuse, le rayonnement et la diffusion enthalpique.

Le film liquide est un fluide non-newtonien obéissant à une loi de puissance de la forme [10–12] :

$$\tau = K \left( \frac{\partial U_L}{\partial y} \right)^n \quad (1)$$

où  $n$  est l'indice de comportement et  $K$  le coefficient de consistance. Ces coefficients, pour un liquide non-newtonien donné, sont obtenus expérimentalement. Les liquides qui obéissent à cette formule sont appelés fluides d'Ostwald-de Waele.

En définissant une viscosité apparente  $\mu_a$  par l'expression :

$$\mu_a = K \left( \frac{\partial U_L}{\partial y} \right)^{n-1} \quad (2)$$

l'Eq. (1) s'écrit sous la forme :

$$\tau = \mu_a \frac{\partial U_L}{\partial y} \quad (3)$$

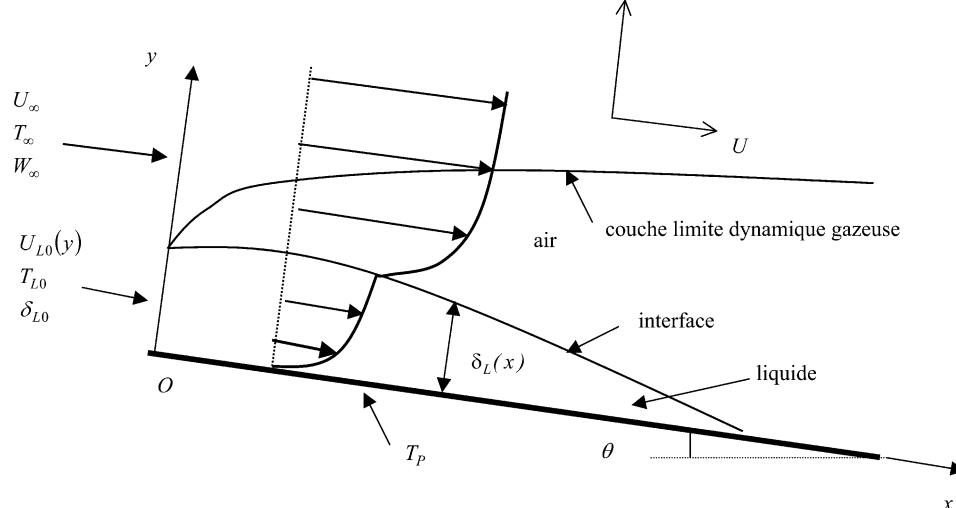


Fig. 1. Représentation schématique du système.

Fig. 1. Schematic representation of the system.

Pour un fluide newtonien ( $n = 1$ ), la viscosité apparente n'est rien d'autre que la viscosité dynamique. Comme exemples de tels fluides, citons les gaz, l'eau, l'éthanol, etc.

Quand  $n$  est différent de l'unité, le fluide est non-newtonien. Si  $n < 1$ , le liquide est appelé pseudoplastique ; la viscosité apparente diminue avec l'augmentation du taux de cisaillement  $\partial U_L / \partial y$ . Parmi ces fluides, on peut citer les solutions de caoutchouc, les solutions de polymères, les graisses, le napalm et les fluides biologiques (sang).

Le fluide dilatant est caractérisé par  $n > 1$ ; la viscosité apparente augmente avec l'augmentation du taux de cisaillement. Comme exemples, citons les suspensions aqueuses d'oxyde de titane, les solutions de farine de maïs, de gomme arabique et de sable [13].

- (a) La vitesse transversale du mélange air-vapeur est calculée en supposant que l'interface est semi-perméable, c'est-à-dire que la solubilité de l'air dans le liquide est négligeable et que la composante transversale de la vitesse de l'air est nulle à l'interface [14] :

$$V_{G,I} = - \left( \frac{D_V}{1-W} \frac{\partial W}{\partial y} \right)_I \quad (4)$$

- (b) En admettant que l'interface est en équilibre thermodynamique et que le mélange air-vapeur se comporte comme un gaz parfait, la fraction massique de vapeur à l'interface est [14] :

$$W_I = \frac{M_V P_{VS}}{[M_a(P - P_{VS}) + M_V P_{VS}]} \quad (5)$$

où  $P_{VS}$  est la pression de vapeur saturante traduisant l'état de saturation de la vapeur à l'interface, évaluée à partir de la relation de Bertrand [6] :

$$\log P_{VS} = 17,443 - \frac{2795}{T_I} - 3,868 \log T_I \quad (6)$$

Dans cette relation,  $P_{VS}$  est exprimé en atmosphères et  $T_I$  en degrés Kelvin.

- (c) L'interface ne possédant ni propriété matérielle ni tension superficielle, étant imperméable à l'air sec et la loi de Fick étant valable dans la phase gazeuse, la densité de flux de vapeur est :

$$\dot{m}_I = - \left( \frac{\rho_G D_V}{1-W} \frac{\partial W}{\partial y} \right)_I \quad (7)$$

## 2.1. Équations de bilan

En introduisant les variables adimensionnelles :

$$x^* = \frac{x}{L}, \quad y^* = \frac{y}{L} \sqrt{Re_G} \quad (8)$$

$$U_L^* = \frac{U_L}{U_\infty}, \quad U_G^* = \frac{U_G}{U_\infty}, \quad V_L^* = \frac{V_L}{U_\infty} \sqrt{Re_G} \quad (9)$$

$$V_G^* = \frac{V_G}{U_\infty} \sqrt{Re_G} \quad (9)$$

$$\begin{aligned} T_L^* &= \frac{T_L - T_\infty}{T_P - T_\infty}, & T_G^* &= \frac{T_G - T_\infty}{T_P - T_\infty} \\ W^* &= \frac{W - W_\infty}{W_P - W_\infty} \end{aligned} \quad (10)$$

$W_P$  est la fraction massique de la vapeur évaluée à la température de la plaque  $T_P$ .

En posant :

$$\eta = \frac{y^*}{\delta^*(X^*)}, \quad \delta^*(X^*) = \frac{\delta_L(x)}{L} \sqrt{Re_G} \quad (11)$$

les équations de bilan s'écrivent, pour les différentes phases :

### Phase liquide

#### Équation du mouvement

$$\frac{Re_G^{(n+1)/2}}{Re_L \delta^{*n+1}} \frac{\partial}{\partial \eta} \left( \frac{\partial U_L^*}{\partial \eta} \right)^n + \frac{\sin \theta}{Fr} = 0 \quad (12)$$

#### Équation de la chaleur

$$U_L^* \left[ \frac{\partial T_L^*}{\partial X^*} - \frac{\eta}{\delta^*} \frac{d\delta^*}{dX^*} \frac{\partial T_L^*}{\partial \eta} \right] = \frac{Re_G}{Pr_L Re_L^{2/(n+1)}} \frac{\partial^2 T_L^*}{\partial \eta^2} \quad (13)$$

### Phase gazeuse

#### Équation de continuité

$$\frac{\partial U_G^*}{\partial X^*} - \frac{\eta}{\delta^*} \frac{d\delta^*}{dX^*} \frac{\partial U_G^*}{\partial \eta} + \frac{1}{\delta^*} \frac{\partial V_G^*}{\partial \eta} = 0 \quad (14)$$

#### Équation du mouvement

$$\begin{aligned} U_G^* \left[ \frac{\partial U_G^*}{\partial X^*} - \frac{\eta}{\delta^*} \frac{d\delta^*}{dX^*} \frac{\partial U_G^*}{\partial \eta} \right] + \frac{V_G^*}{\delta^*} \frac{\partial U_G^*}{\partial \eta} \\ = \frac{1}{\delta^{*2}} \frac{\partial^2 U_G^*}{\partial \eta^2} \end{aligned} \quad (15)$$

#### Équation de la chaleur

$$\begin{aligned} U_G^* \left[ \frac{\partial T_G^*}{\partial X^*} - \frac{\eta}{\delta^*} \frac{d\delta^*}{dX^*} \frac{\partial T_G^*}{\partial \eta} \right] + \frac{V_G^*}{\delta^*} \frac{\partial T_G^*}{\partial \eta} \\ = \frac{1}{Pr_G \delta^{*2}} \frac{\partial^2 T_G^*}{\partial \eta^2} \end{aligned} \quad (16)$$

#### Équation de diffusion de la vapeur

$$\begin{aligned} U_G^* \left[ \frac{\partial W^*}{\partial X^*} - \frac{\eta}{\delta^*} \frac{d\delta^*}{dX^*} \frac{\partial W^*}{\partial \eta} \right] + \frac{V_G^*}{\delta^*} \frac{\partial W^*}{\partial \eta} \\ = \frac{1}{Sc \delta^{*2}} \frac{\partial^2 W^*}{\partial \eta^2} \end{aligned} \quad (17)$$

Dans la phase liquide, les nombres adimensionnels qui apparaissent sont : le nombre de Froude  $Fr = U_\infty^2 / (gL)$ , le nombre de Prandtl généralisé  $Pr_L = C_P L U_\infty \rho_L L / (\lambda_L Re_L^{2/(n+1)})$  et le nombre de Reynolds généralisé  $Re_L = \rho_L U_\infty^{2-n} L^n / K$ .

Dans la phase gazeuse, les nombres adimensionnels qui apparaissent sont : le nombre de Reynolds  $Re_G = U_\infty L / v_G$ , le nombre de Prandtl  $Pr_G = \mu_G C_P G / \lambda_G$  et le nombre de Schmidt  $Sc = v_G / D_V$ .

## 2.2. Conditions aux limites et à l'interface

À l'entrée ( $X^* = 0$ )

$$\begin{aligned} T_L^* &= T_{L0}^*, & U_L^* &= U_{L0}^*(\eta), & V_L^* &= 0, & U_G^* &= 1 \\ V_G^* &= 0, & T_G^* &= 0, & W^* &= 0 \end{aligned} \quad (18)$$

où  $U_{L0}^*(\eta)$  est donné par l'expression :

$$U_{L0}^*(\eta) = \frac{n}{n+1} \left( \frac{\sin \theta}{Fr} \right)^{1/n} \frac{Re_L^{1/n}}{Re_G^{(n+1)/2n}} \delta_{L0}^{*(n+1)/n} \times (1 - (1 - \eta)^{(n+1)/n}) \quad (18a)$$

À la paroi ( $\eta = 0$ , condition d'adhérence et d'isothermie)

$$U_L^* = V_L^* = 0, \quad T_L^* = 1 \quad (19)$$

À la frontière de la couche limite gazeuse ( $\eta \rightarrow \infty$ )

$$U_G^* = 1, \quad V_G^* = 0, \quad T_G^* = 0, \quad W^* = 0 \quad (20)$$

À l'interface ( $\eta = 1$ ), selon [15], l'hypothèse de non-glissement des phases liquide et gazeuse l'une sur l'autre permet d'écrire :

$$(U_L^*)_I = (U_G^*)_I = U_I^* \quad (21)$$

L'hypothèse selon laquelle l'interface est en équilibre thermodynamique entraîne la condition suivante :

$$(T_L^*)_I = (T_G^*)_I = T_I^* \quad (22)$$

La faible épaisseur du film liquide et la grande valeur de son nombre de Reynolds permettent d'écrire la condition de continuité de la contrainte de cisaillement à l'interface sous la forme simplifiée :

$$\begin{aligned} &\frac{2Re_G^{n/2}}{\rho_G U_\infty^{2-n} L^n \delta^{*n}} \left( K \left( \frac{\partial U_L^*}{\partial \eta} \right)_I^n \right) \\ &= \frac{2Re_G^{1/2}}{\rho_G U_\infty L \delta^*} \left( \mu_G \frac{\partial U_G^*}{\partial \eta} \right)_I = Cf_I \end{aligned} \quad (23)$$

La condition de continuité du flux de chaleur à l'interface est :

$$\left( \frac{\lambda_L}{\lambda_G} \frac{\partial T_L^*}{\partial \eta} \right)_I = \left( \frac{\partial T_G^*}{\partial \eta} \right)_I + \left( \frac{H}{1-W} \frac{\partial W^*}{\partial \eta} \right)_I \quad (24)$$

où  $H$  est la chaleur latente massique adimensionnelle définie par la relation :

$$H = \frac{\rho_G D_V h (W_P - W_\infty)}{\lambda_G (T_P - T_\infty)} \quad (25)$$

La condition de conservation du débit liquide le long de la paroi s'écrit :

$$\frac{1}{Q_0^*} \int_0^1 U_L^* d\eta + Mr = 1 \quad (26)$$

où  $Mr$  est le taux d'évaporation adimensionnel défini par la relation :

$$Mr = \frac{L}{Q_0} \int_0^{X^*} \dot{m}_I dX^* \quad (27)$$

et  $Q_0^*$  le débit adimensionnel du liquide défini par l'expression :

$$Q_0^* = \frac{Q_0 \sqrt{Re_G}}{\rho_L U_\infty \delta^* L} \quad (28)$$

## 2.3. Coefficient de frottement interfacial et pariétal

Les coefficients de frottement interfacial et pariétal sont :

$$Cf_I = \frac{2\sqrt{Re_G}}{\rho_G U_\infty L \delta^*} \left( \mu_G \frac{\partial U_G^*}{\partial \eta} \right)_I \quad (29)$$

$$Cf_P = \frac{2Re_G^{n/2}}{\rho_G U_\infty^{2-n} L^n \delta^{*n}} \left( K \left( \frac{\partial U_L^*}{\partial \eta} \right)_P^n \right) \quad (30)$$

## 2.4. Nombres de Nusselt et de Sherwood

Les nombres de Nusselt relatifs aux transferts de chaleur sensible et latente sont définis par les relations suivantes :

$$Nu_S = -X^* \frac{\sqrt{Re_G}}{\delta^*} \left( \frac{\partial T_G^*}{\partial \eta} \right)_I \quad (31)$$

$$Nu_L = -X^* \frac{\sqrt{Re_G}}{\delta^*} \left( \frac{H}{1-W} \frac{\partial W^*}{\partial \eta} \right)_I \quad (32)$$

Le nombre de Sherwood est :

$$Sh_x = -X^* \frac{\sqrt{Re_G}}{\delta^*} \left( \frac{1}{1-W} \frac{\partial W^*}{\partial \eta} \right)_I \quad (33)$$

Il est important de noter que les équations se réduisent à celles citées dans Agunaoun et al. [6] pour un système eau-air, c'est-à-dire pour un film liquide newtonien ( $n = 1$ ).

## 3. Résolution numérique

Dans la phase liquide, l'intégration de l'Eq. (12) avec les conditions aux limites (Eq. (19)) et (Eq. (23)) donne aisément l'expression analytique du profil de la vitesse à travers le film liquide :

$$\begin{aligned} U_L^*(\eta) &= \frac{n}{n+1} \left( \frac{\sin \theta}{Fr} \right)^{1/n} \frac{Re_L^{1/n}}{Re_G^{(n+1)/2n}} \delta^{*(n+1)/n} \\ &\times \left( \left( 1 + \frac{\rho_G Fr C_f I \sqrt{Re_G}}{2\rho_L \sin \theta \delta^*} \right)^{(n+1)/n} \right. \\ &\left. - \left( 1 - \eta + \frac{\rho_G Fr C_f I \sqrt{Re_G}}{2\rho_L \sin \theta \delta^*} \right)^{(n+1)/n} \right) \end{aligned} \quad (34)$$

Ce profil, pour  $n = 1$ , coïncide avec la solution analytique donnée par Baumann et Thiele [5].

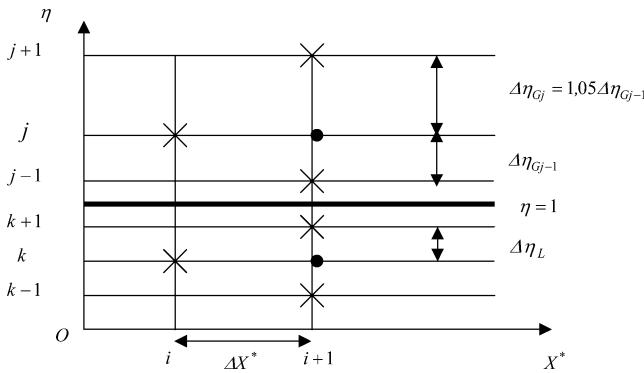


Fig. 2. Représentation schématique du maillage dans les couches limites.  $\times$  Nœuds utilisés dans la discréttisation,  $\bullet$  nœud sur lequel porte le calcul.

Fig. 2. Schematic representation of the grid across the boundary-layers.  $\times$  Nodes used in the discretization,  $\bullet$  node on which the calculus is done.

Les équations de bilan (13)–(17) sont résolues numériquement en utilisant une méthode aux différences finies implicite. Les dérivées premières des grandeurs  $U^*$ ,  $V^*$ ,  $T^*$ ,  $W^*$  et  $\delta^*$  dans la direction longitudinale sont approchées par une différence finie vers l'avant. Dans la direction transversale, les grandeurs  $U^*$ ,  $V^*$ ,  $T^*$  et  $W^*$  sont approchées par une différence centrée. Le maillage est uniforme suivant la direction longitudinale. Dans la direction transversale, il est uniforme dans la phase liquide et variable dans la couche limite gazeuse. La Fig. 2 présente un schéma du maillage.

A l'interface, la condition de continuité de la contrainte de cisaillement et celle du flux de chaleur  $(\frac{\partial \phi}{\partial \eta})_L$  sont discréttisées par des différences finies vers l'arrière dans la phase liquide et, dans le gaz,  $(\frac{\partial \phi}{\partial \eta})_G$  par des différences finies vers l'avant,  $\phi$  représentant  $U$  ou  $T$ . Le système d'équations aux différences finies forme un ensemble triadiagonal d'équations algébriques qui sont résolues par l'algorithme de Thomas. La procédure de résolution est conforme à l'organigramme présenté sur la Fig. 3.

Ayant obtenu le profil de la vitesse  $U_L^*(\eta)$  dans la phase liquide en intégrant l'équation du mouvement (Éq. (12)) avec les conditions aux limites (Éq. (19)) et (Éq. (23)), on intègre l'équation du mouvement dans la phase gazeuse (Éq. (15)) en utilisant la condition de non-glissement des phases liquide et gazeuse l'une sur l'autre (Éq. (21)) et la condition aux limites (Éq. (20)). Le profil de la vitesse  $U_G^*(\eta)$  dans la phase gazeuse ainsi obtenu doit vérifier la condition de continuité de la contrainte de cisaillement à l'interface (Éq. (23)). Si la condition n'est pas satisfaite, on se donne une autre valeur au coefficient de frottement interfacial  $Cf_I$  et on recommence l'intégration jusqu'à ce que cette condition soit satisfaite.

Afin d'obtenir des résultats indépendants du maillage, plusieurs expériences numériques ont été menées en choisissant plusieurs combinaisons des nombres de nœuds dans la direction longitudinale et dans la direction transversale à travers les phases liquide et gazeuse. Les valeurs du taux d'évaporation  $Mr$  pour différents maillages sont présentées

Tableau 1

Valeur de l'épaisseur initiale  $\delta_{L0}$ , du débit d'entrée  $Q_0$  et du nombre de Reynolds dans la phase liquide  $Re_{L0}$ .  $K = 0,00095 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-1}\cdot\text{s}^{-2}$ ,  $\rho_L = 999,0 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$

Table 1

Initial value of the thickness  $\delta_{L0}$ , the inlet flow rate  $Q_0$  and Reynolds number in the liquid phase  $Re_{L0}$ .  $K = 0.00095 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-1}\cdot\text{s}^{-2}$ ,  $\rho_L = 999.0 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$

$n$	$\delta_{L0} \times 10^{-4}$ m	$Q_0 \times 10^{-3}$ $\text{kg}\cdot\text{m}^{-1}\cdot\text{s}^{-1}$	$Re_{L0}$
0,7	0,616	0,92	20
0,9	1,395	2,88	20
1,2	3,770	11,40	20
1,4	6,490	23,90	20

sur la Fig. 4. Tous les résultats sont obtenus avec le maillage  $101 \times 21 \times 101$ .

#### 4. Résultats et discussion

Nos calculs sont effectués dans les conditions suivantes :  $T_P = 50^\circ\text{C}$ ,  $L = 1 \text{ m}$ ,  $\theta = 10^\circ$ ,  $T_{L0} = T_\infty = 20^\circ\text{C}$ ,  $U_\infty = 1 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$ ,  $W_\infty = 0,001$ . Pour l'air, on prend  $Pr_G = 0,71$  et  $Sc = 0,63$ , les autres propriétés thermophysiques sont empruntées à Agunaoun et al. [6]. Pour le film liquide,  $C_{PL} = 4180,0 \text{ J}\cdot\text{kg}^{-1}\cdot\text{K}^{-1}$  et  $\lambda_L = 0,0555 \text{ W}\cdot\text{m}^{-1}\cdot\text{K}^{-1}$ . Les épaisseurs initiales et les débits correspondants sont rassemblés dans le Tableau 1.

Sur la Fig. 5, on observe un très bon accord entre nos résultats et ceux d'Agunaoun et al. [6] en ce qui concerne la variation longitudinale du coefficient de frottement pariétal  $Cf_P$  pour un système eau-air ( $n = 1$ ).

L'épaisseur du film augmente à proximité de l'entrée en raison de l'effet de freinage de la paroi qui est plus important que les effets d'entraînement de l'air et de l'évaporation. Au delà, l'épaisseur décroît à cause de l'évaporation. Cependant, cette décroissance dépend de l'indice de comportement ; par exemple entre  $X^* = 0,2$  et  $X^* = 0,8$ , l'épaisseur est réduite de 9 % pour  $n = 0,7$  et 2 % pour  $n = 0,9$ . Dans le cas des liquides dilatants, cette réduction est plus faible. Entre les mêmes positions, l'épaisseur du film liquide est réduite de 0,5 % pour  $n = 1,2$  et de 0,2 % pour  $n = 1,4$ . Il convient toutefois de remarquer que l'échelle des coordonnées sur la Fig. 6 étant dilatées, les variations de  $\delta^*$  sont faibles.

Le taux d'évaporation augmente longitudinalement à cause de l'évaporation continue du liquide. Il est plus important pour les liquides pseudoplastiques que pour les liquides dilatants.

La Fig. 7 présente (avec, comme précédemment, des échelles dilatées pour les coordonnées) les variations longitudinales de la température interfaciale  $T_I^*$  et de la vitesse interfaciale  $U_I^*$ . La température interfaciale tend vers celle de la plaque après un ajustement près de l'entrée ; loin de celle-ci, l'interface se comporte comme une surface isotherme.

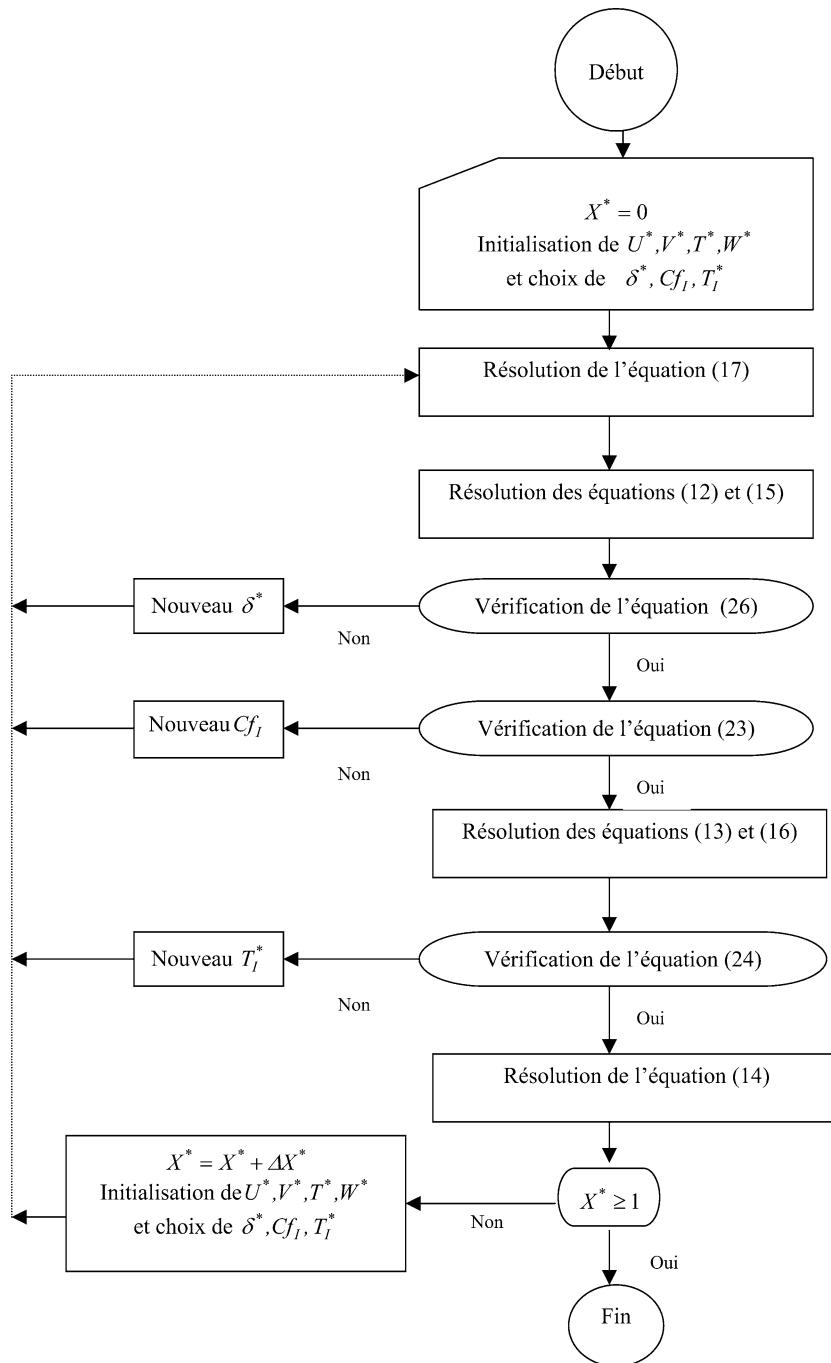


Fig. 3. Organigramme des calculs.

Fig. 3. Diagram of the calculation.

Cependant, cette tendance dépend de l'indice de comportement. En effet, pour un liquide pseudoplastique, la température interfaciale croît plus rapidement que dans le cas d'un liquide dilatant. Cela s'explique par l'influence du profil de la vitesse dans la phase liquide qui dépend fortement de l'indice de comportement. Quant à la vitesse interfaciale, elle diminue le long de la paroi à cause de l'effet de retardement de celle-ci, qui est plus fort que l'effet d'accélération de l'air et croît avec l'augmentation de l'indice de comportement.

Les variations longitudinales des coefficients de frottement interfaciaux  $Cf_I$  et pariétaux  $Cf_P$  sont représentées sur la Fig. 8. Le coefficient de frottement pariétal est beaucoup plus important que le coefficient interfacial et dépend de l'indice de comportement car il est proportionnel aux gradients de la vitesse dans la phase liquide, qui en sont, eux-mêmes, fonction.

Les variations transversales de la vitesse  $U_L^*$  et de la température  $T_L^*$  dans la phase liquide sont représentées sur la

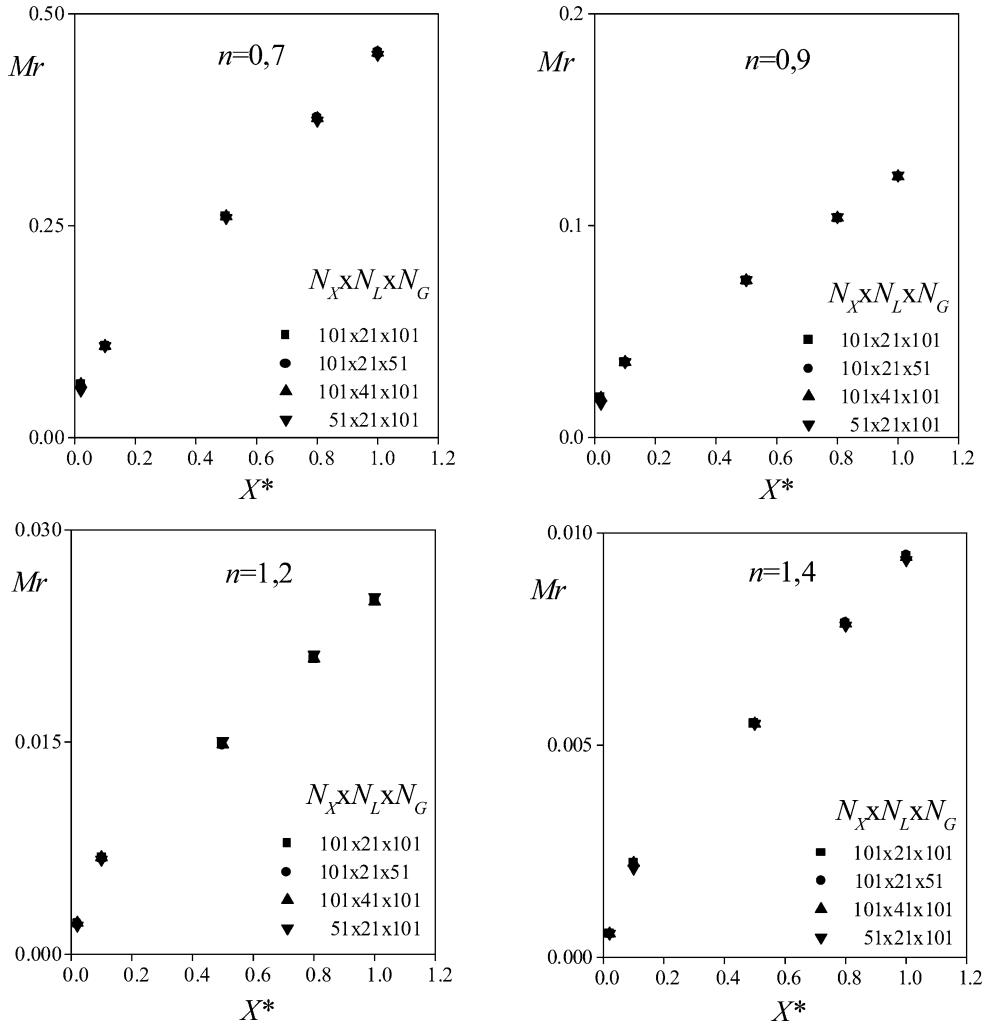
Fig. 4. Influence des nombres de noeuds  $N_X \times N_L \times N_G$  sur le taux d'évaporation  $Mr$ .Fig. 4. Effect of the nodes number  $N_X \times N_L \times N_G$  on the evaporation rate  $Mr$ .

Fig. 9. Les profils de la vitesse sont semi-paraboliques alors que ceux de la température sont quasi linéaires. Il est clair que l'indice de comportement influe profondément sur ces profils.

La Fig. 10, représente en fonction de la distance transversale rapportée à l'épaisseur du film liquide, les profils dans la phase gazeuse, de la vitesse  $U_G^*$  et de la température  $T_G^*$ . Ce sont des profils paraboliques typiques d'une couche limite laminaire de l'air sur une paroi solide. Ils sont fortement influencés par l'indice de comportement. Ils s'inversent pour les liquides pseudoplastiques mais non pour les liquides dilatants. Ils s'établissent d'autant plus vite que l'indice de comportement est grand, ce qui laisse subodorer que l'augmentation de l'indice de comportement du liquide fait décroître l'épaisseur de la couche limite gazeuse [16].

Observons enfin la Fig. 11 pour déterminer l'influence de l'indice de comportement du film liquide sur les nombres de Nusselt sensible  $Nu_S$  et latent  $Nu_L$ . Il est clair que les transferts de chaleur augmentent suivant la direction longitudinale à cause de l'apport continu de chaleur et de masse

à l'interface et diminuent avec l'augmentation de l'indice de comportement. Comme la température diminue quand l'indice de comportement augmente, les nombres de Nusselt diminuent par voie de conséquence. En comparant les échelles des Fig. 11(a) et (b), il apparaît que le nombre de Nusselt latent est beaucoup plus grand que le nombre de Nusselt sensible, ce qui montre que le transfert de chaleur interfacial résultant de l'échange de chaleur latente est plus important. La Fig. 11(c) montre que le nombre de Sherwood  $Sh_x$  augmente longitudinalement à cause de l'apport continu de masse dû à l'évaporation, et diminue quand l'indice de comportement augmente puisque la fraction massique diminue comme la température ( $Pr_G \approx Sc$ ) avec l'augmentation de cet indice.

La Fig. 12 montre l'influence de la différence de température  $\Delta T$  entre celle de la plaque  $T_P$  et celle de l'air  $T_\infty$  sur le taux d'évaporation  $Mr$ . Celui-ci est d'autant plus important que la température de la plaque est plus élevée. En effet, le film liquide est, alors, davantage chauffé, ce qui favorise

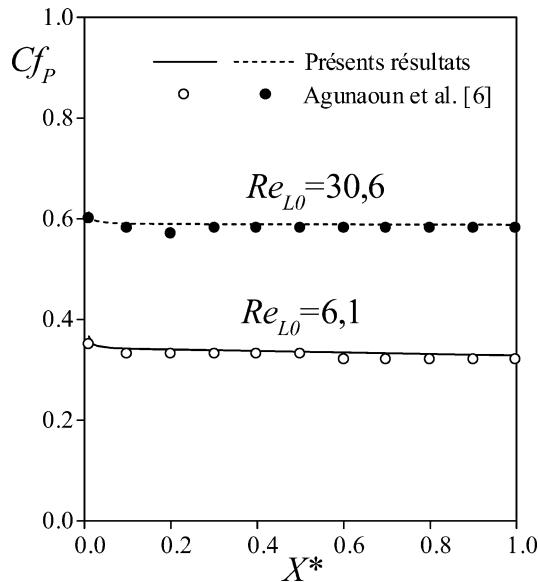


Fig. 5. Comparaison entre nos résultats et ceux d'Agunaoun et al. [6] concernant les variations longitudinales du coefficient de frottement pariétal  $Cf_P$  pour un système eau-air ( $n = 1$ ).

Fig. 5. Comparison between our results and those of Agunaoun et al. [6] concerning the longitudinal variations of the wall friction coefficient  $Cf_P$  for water-air system ( $n = 1$ ).

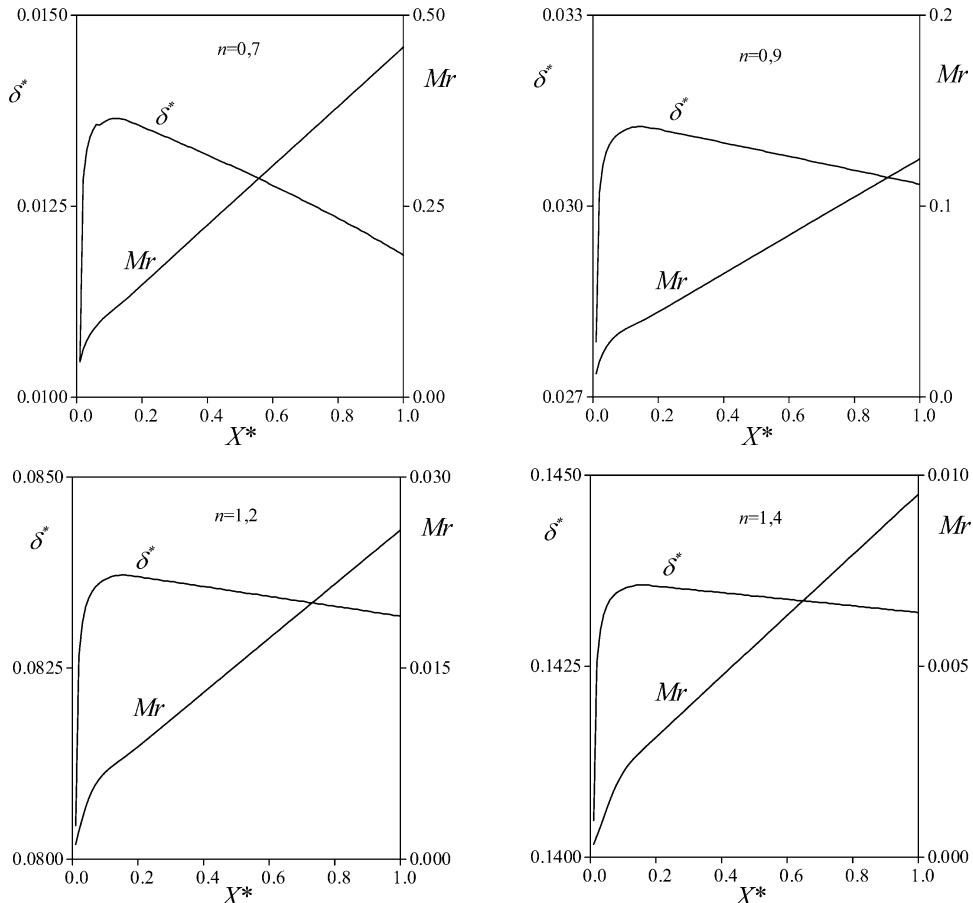


Fig. 6. Variations longitudinales de l'épaisseur  $\delta^*$  et du taux d'évaporation  $Mr$ .

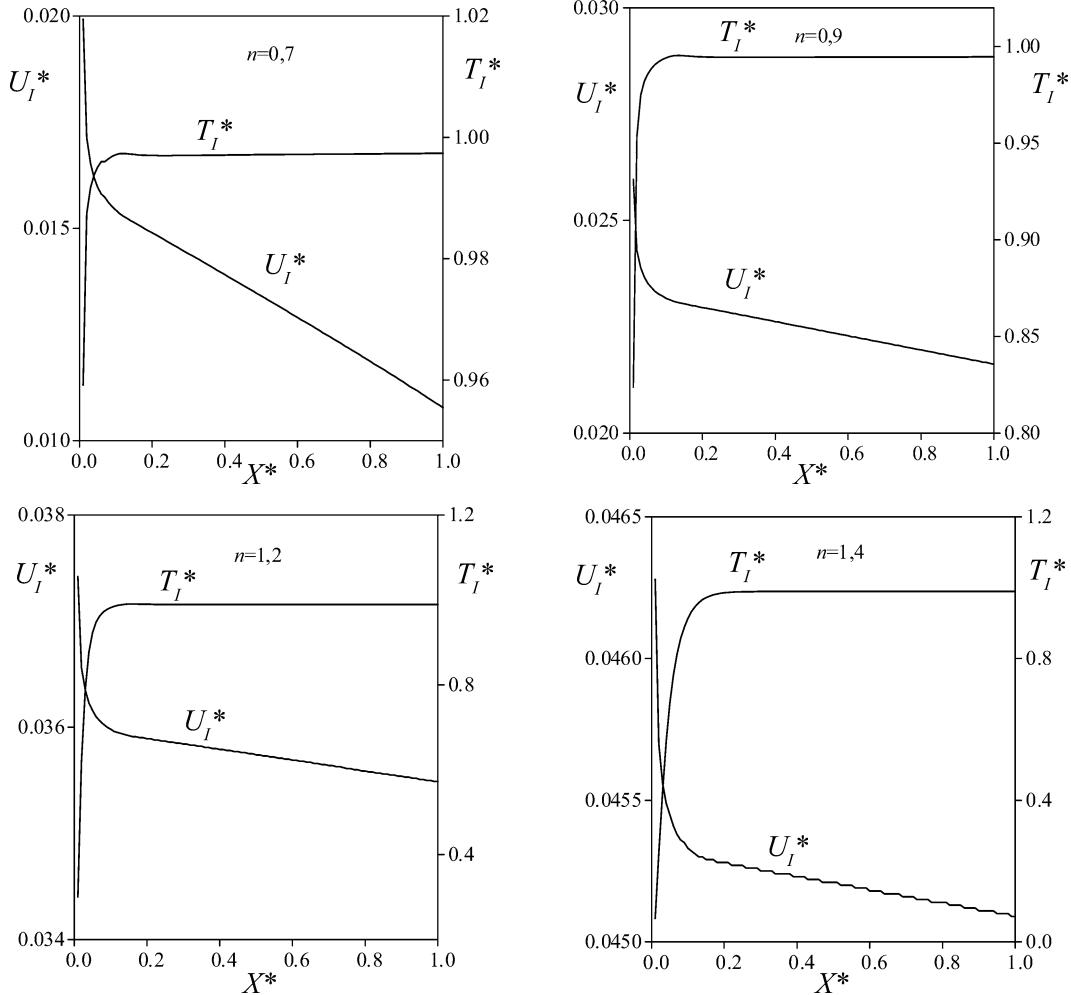
Fig. 6. Longitudinal variations of the thickness  $\delta^*$  and of the evaporation rate  $Mr$ .

le transfert de chaleur et de masse à l'interface. Il en résulte une évaporation plus importante.

## 5. Conclusion

Nous avons étudié numériquement l'évaporation d'un film liquide mince non-newtonien de type d'Ostwald-de Waele sur une surface plane inclinée et isotherme en nous attachant particulièrement à déterminer l'influence, sur les transferts de chaleur et de masse, de l'indice de comportement  $n$  du liquide. Des résultats présentés, les conclusions suivantes peuvent être tirées :

- L'indice de comportement influe énormément sur les transferts de chaleur et de masse ainsi que sur les caractéristiques dynamiques et thermiques liées à l'évaporation.
- L'interface liquide-gaz se comporte comme une paroi solide isotherme de température voisine de celle de la surface.
- L'évaporation est plus importante pour les films pseudo-plastiques que pour les fluides dilatants.

Fig. 7. Variations longitudinales de la vitesse interfaciale  $U_I^*$  et de la température interfaciale  $T_I^*$ .Fig. 7. Longitudinal variations of the interfacial velocity  $U_I^*$  and of the interfacial temperature  $T_I^*$ .

- (d) Le transfert de chaleur entre le film liquide et l'air est dominé par le transport de la chaleur latente associée à l'évaporation du film.
- (e) L'augmentation de la température de la plaque favorise l'évaporation.

#### Annexe A. Profil de la vitesse du film liquide à l'entrée

La vitesse initiale du film liquide s'obtient à partir de l'équation du mouvement suivante :

$$\frac{K}{\rho_L} \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial U_{L0}}{\partial y} \right)^n + g \sin \theta = 0 \quad (\text{A.1})$$

avec les conditions aux limites :

– A la paroi

$$y = 0, \quad U_{L0} = 0 \quad (\text{A.2})$$

– Sur la surface libre

$$y = \delta_{L0}, \quad \frac{\partial U_{L0}}{\partial y} = 0 \quad (\text{A.3})$$

Le débit initial se calcule à partir de la relation :

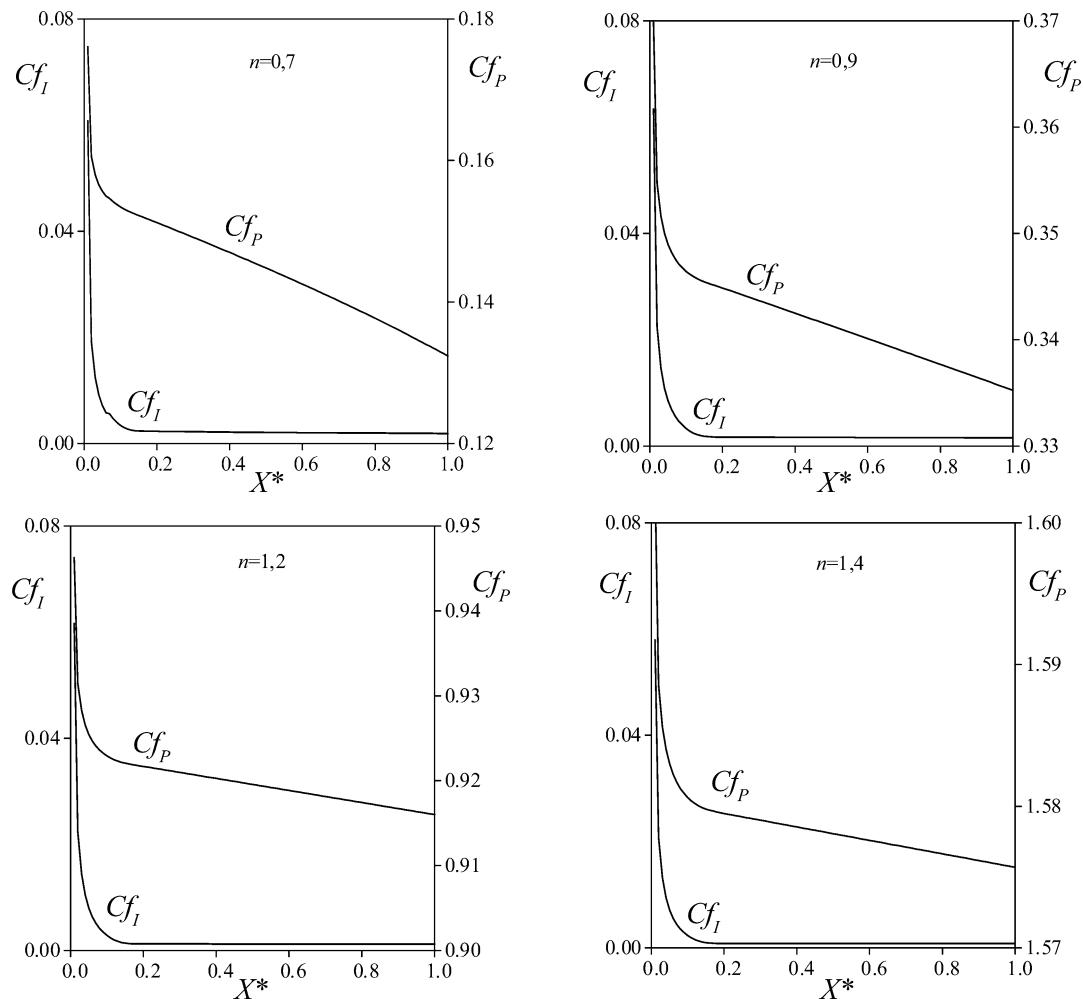
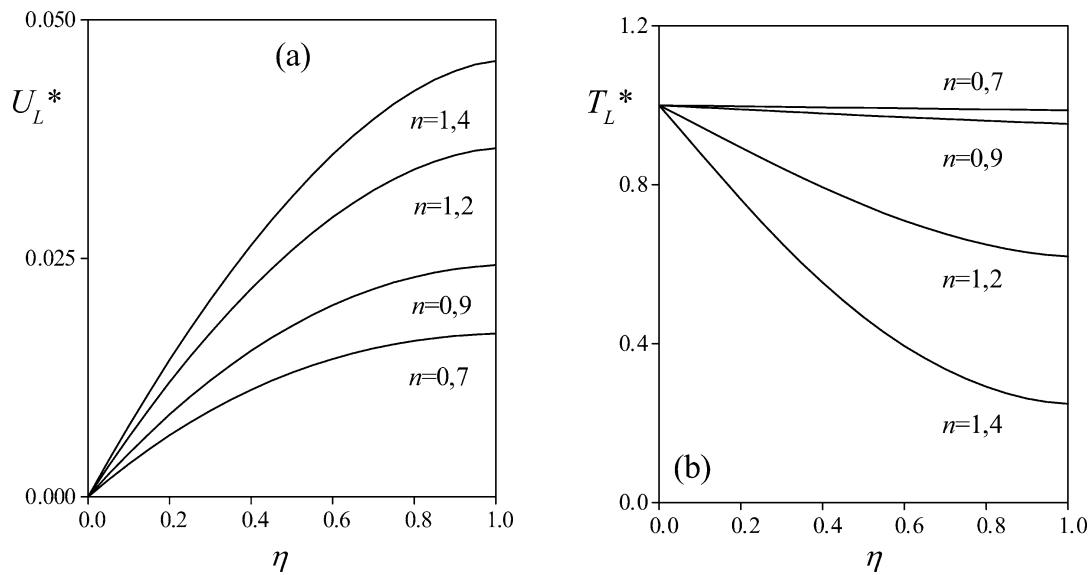
$$Q_0 = \int_0^{\delta_{L0}} \rho_L U_L \, dy \quad (\text{A.4})$$

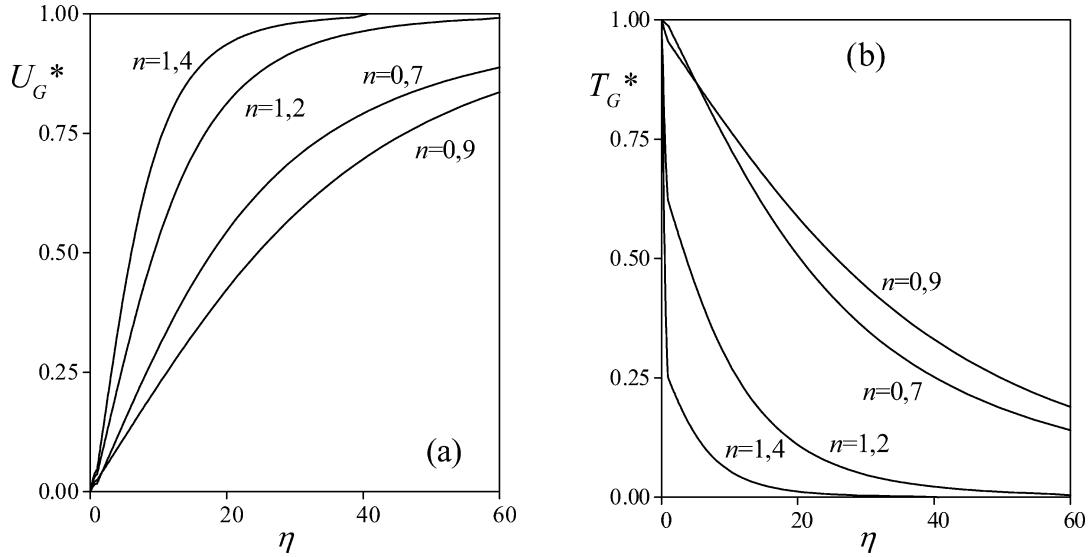
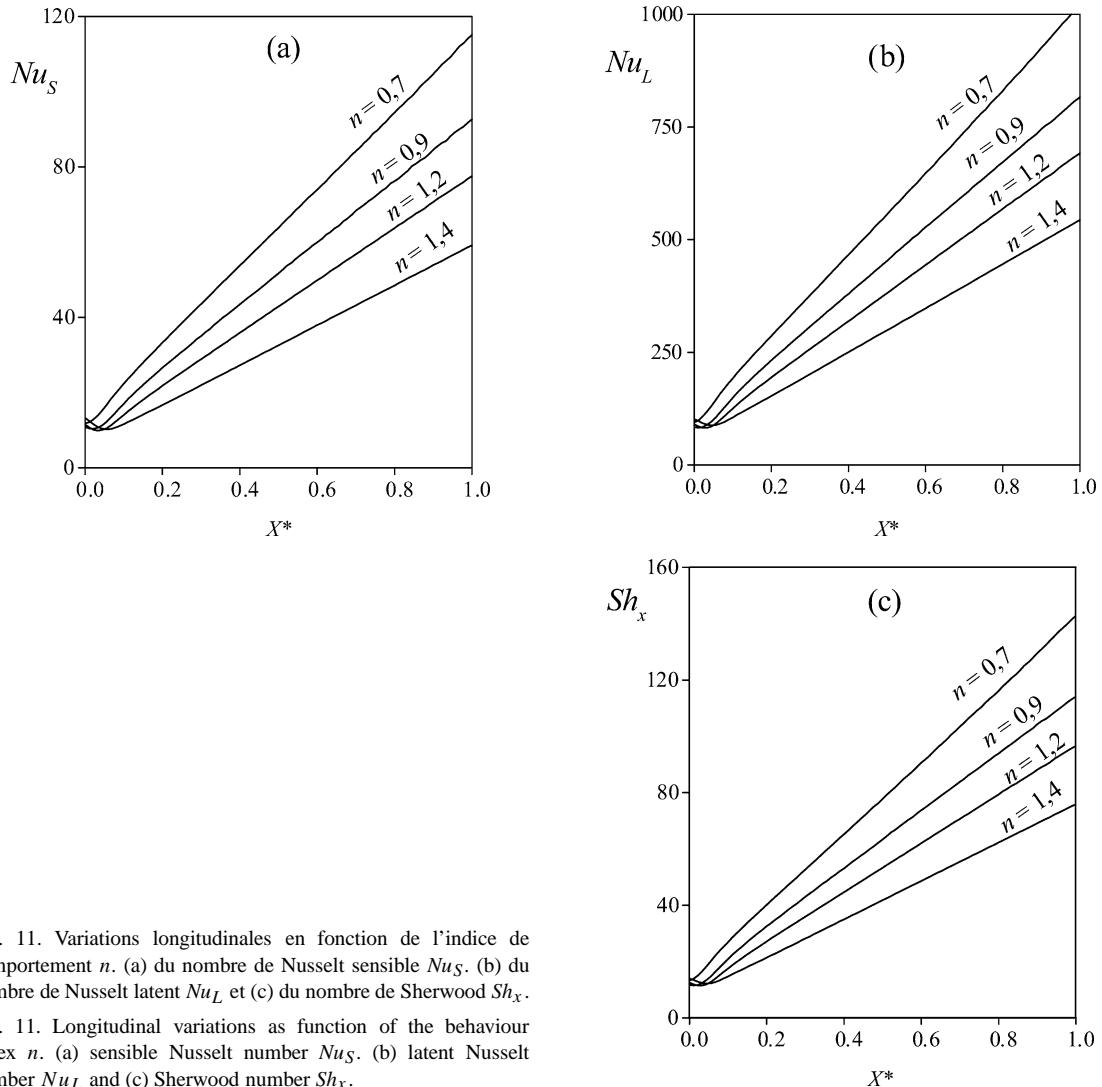
En intégrant l'Éq. (A.1) avec les conditions aux limites (A.2) et (A.3), on trouve le profil de la vitesse à l'entrée :

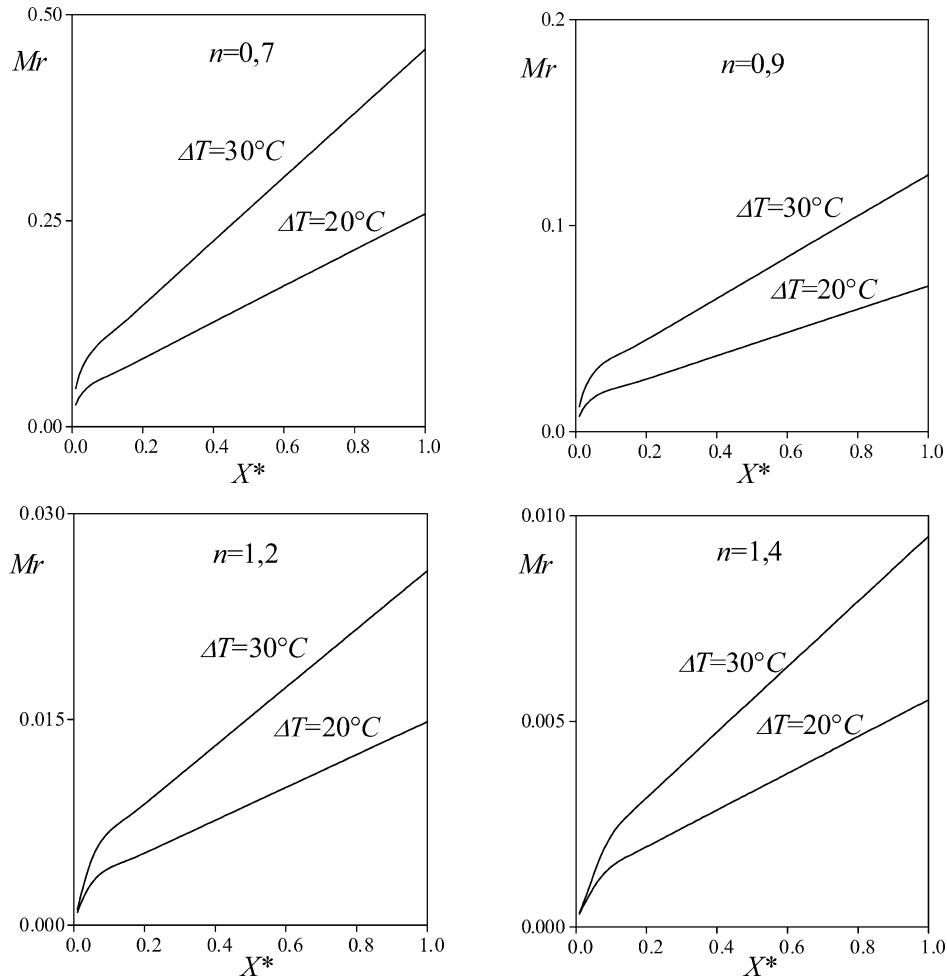
$$U_{L0}(y) = \frac{n}{n+1} \left( \frac{\rho_L g \sin \theta}{K} \right)^{1/n} \delta_{L0}^{(n+1)/n} \times \left( 1 - \left( 1 - \frac{y}{\delta_{L0}} \right)^{(n+1)/n} \right) \quad (\text{A.5})$$

En utilisant les Éqs. (A.4) et (A.5), le débit initial est :

$$Q_0 = \frac{n}{2n+1} \rho_L^{(n+1)/n} \left( \frac{g \sin \theta}{K} \right)^{1/n} \delta_{L0}^{(2n+1)/n} \quad (\text{A.6})$$

Fig. 8. Variations longitudinales du coefficient de frottement interfacial  $Cf_I$  et du coefficient de frottement pariétal  $Cf_P$ .Fig. 8. Longitudinal variations of the interfacial friction coefficient  $Cf_I$  and of the wall friction coefficient  $Cf_P$ .Fig. 9. Profils de la vitesse  $U_L^*$  et de la température  $T_L^*$  dans la phase liquide à  $X^* = 0,02$ .Fig. 9. Profiles of the velocity  $U_L^*$  and of the temperature  $T_L^*$  in the liquid phase at  $X^* = 0.02$ .

Fig. 10. Profils de la vitesse  $U_G^*$  et de la température  $T_G^*$  dans la phase gazeuse à  $X^* = 0,02$ .Fig. 10. Profiles of the velocity  $U_G^*$  and of the temperature  $T_G^*$  in the gas phase at  $X^* = 0.02$ .Fig. 11. Variations longitudinales en fonction de l'indice de comportement  $n$ . (a) du nombre de Nusselt sensible  $Nu_S$ . (b) du nombre de Nusselt latent  $Nu_L$  et (c) du nombre de Sherwood  $Sh_x$ .Fig. 11. Longitudinal variations as function of the behaviour index  $n$ . (a) sensible Nusselt number  $Nu_S$ . (b) latent Nusselt number  $Nu_L$  and (c) Sherwood number  $Sh_x$ .

Fig. 12. Influence de la différence de température  $\Delta T = T_P - T_\infty$  sur le taux d'évaporation  $Mr$ .Fig. 12. Effect of the temperature difference  $\Delta T = T_P - T_\infty$  on the evaporation rate  $Mr$ .

Le nombre de Reynolds du film liquide s'écrit alors :

$$Re_{L0} = \frac{4\rho_L^{n-1}\delta_{L0}^{2n-2}Q_0^{2-n}}{K} \quad (\text{A.7})$$

Si  $n = 1$ , en remplaçant le coefficient de consistance  $K$  par la viscosité dynamique  $\mu_L$  dans les Éqs. (A.5) et (A.7), on retrouve les expressions connues pour le profil de vitesse et le nombre de Reynolds, à savoir [17]

$$U_{L0}(y) = \frac{g \sin \theta \delta_{L0}^2}{2\nu_L} \left( 1 - \left( 1 - \frac{y}{\delta_{L0}} \right)^2 \right) \quad (\text{A.8})$$

et

$$Re_{L0} = \frac{4Q_0}{\mu_L} \quad (\text{A.9})$$

#### Expressions des dérivées partielles

Dans la phase liquide, les dérivées partielles, au nœud  $(i+1, k)$ , sont approchées par les expressions suivantes :

$$\left( \frac{\partial \phi}{\partial X^*} \right)_k^{i+1} = \frac{\phi_k^{i+1} - \phi_k^i}{\Delta X^*} \quad (\text{A.10})$$

$$\left( \frac{\partial \phi}{\partial \eta} \right)_k^{i+1} = \frac{\phi_{k+1}^{i+1} - \phi_{k-1}^{i+1}}{2\Delta \eta_L} \quad (\text{A.11})$$

$$\left( \frac{\partial^2 \phi}{\partial \eta^2} \right)_k^{i+1} = \frac{\phi_{k+1}^{i+1} - 2\phi_k^{i+1} + \phi_{k-1}^{i+1}}{\Delta \eta_L^2} \quad (\text{A.12})$$

Dans la phase gazeuse, au nœud  $(i+1, j)$ , les dérivées partielles sont exprimées par les relations suivantes :

$$\left( \frac{\partial \phi}{\partial X^*} \right)_j^{i+1} = \frac{\phi_j^{i+1} - \phi_j^i}{\Delta X^*} \quad (\text{A.13})$$

$$\begin{aligned} \left( \frac{\partial \phi}{\partial \eta} \right)_j^{i+1} &= \frac{1}{\Delta \eta_{Gj} + \Delta \eta_{Gj-1}} \left[ \frac{\Delta \eta_{Gj-1}}{\Delta \eta_{Gj}} (\phi_{j+1}^{i+1} - \phi_j^{i+1}) \right. \\ &\quad \left. + \frac{\Delta \eta_{Gj}}{\Delta \eta_{Gj-1}} (\phi_j^{i+1} - \phi_{j-1}^{i+1}) \right] \end{aligned} \quad (\text{A.14})$$

$$\begin{aligned} \left( \frac{\partial^2 \phi}{\partial \eta^2} \right)_j^{i+1} &= \frac{2}{\Delta \eta_{Gj} + \Delta \eta_{Gj-1}} \left[ \frac{1}{\Delta \eta_{Gj}} (\phi_{j+1}^{i+1} - \phi_j^{i+1}) \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{\Delta \eta_{Gj-1}} (\phi_j^{i+1} - \phi_{j-1}^{i+1}) \right] \end{aligned} \quad (\text{A.15})$$

où  $\phi$  représente la variable à discréteriser [18].

### Abridged English version

The liquid film evaporation is of great interest both theoretically and practically, especially in turbines cooling, fuel injection, distillation etc. Many studies have been carried out numerically and experimentally, either in forced or natural convection, laminar or turbulent flows. In these studies the liquid film was considered to be Newtonian, whereas, many liquids exhibiting non-Newtonian behaviour may undergo evaporation.

This article presents a study concerning the evaporation of an Ostwaldian liquid film flowing over an isothermal inclined plane surface. The film is exposed to a forced laminar cocurrent air stream. The liquid film flow is considered to be partially two-dimensional, laminar and waveless. The gas flow is considered to be two-dimensional and incompressible. The thermophysical properties are constant, Soret and Dufour effects are negligible. Moreover, the superficial tension, viscous dissipation, radiative heat and enthalpy diffusion effects are ignored. The governing equations and the related interfacial conditions are written in dimensionless form and solved using a fully implicit finite differences scheme.

From the numerical study the following practical conclusions can be drawn:

- (a) The behaviour index considerably influences the heat and mass transfer and the dynamic and thermal features related to the evaporation.
- (b) The interfacial and the plate temperatures are close. Thereby the liquid-gas interface behaves as an isothermal solid surface.
- (c) The evaporation is more significant for pseudoplastic films than for dilatant ones.
- (d) Heat transfer between the liquid film and the air is dominated by latent heat associated to film evaporation.
- (e) An increase of the temperature of the plate causes higher evaporation.

### Références

- [1] T.R. Shembarkar, B.R. Pai, Prediction of film cooling with a liquid coolant, *Internat. J. Heat Mass Tranfer* 29 (1986) 899–908.
- [2] L.C. Chow, J.N. Chung, Evaporation of water into a laminar stream of air and superheated steam, *Internat. J. Heat Mass Tranfer* 26 (1983) 373–380.
- [3] K. Suzuki, Y. Hagiwara, T. Sato, Heat transfer and flow characteristics of two-phase two-component annular flow, *Internat. J. Heat Mass Tranfer* 26 (1983) 597–605.
- [4] W.M. Yan, T.F. Lin, Combined heat and mass transfer in natural convection between vertical parallel plates with film evaporation, *Internat. J. Heat Mass Tranfer* 33 (1990) 529–541.
- [5] W.W. Baumann, F. Thiele, Heat and mass transfer in evaporating two-component liquid film flow, *Internat. J. Heat Mass Tranfer* 33 (1990) 267–273.
- [6] A. Agunaoun, A. Daif, R. Barriol, M. Daguenet, Évaporation en convection forcée d'un film mince s'écoulant en régime permanent, laminaire et sans ondes, sur une surface plane inclinée, *Internat. J. Heat Mass Tranfer* 37 (1994) 2947–2956.
- [7] W.M. Yan, C.Y. Soong, Convective heat and mass transfer along an inclined heated plate with film evaporation, *Internat. J. Heat Mass Tranfer* 38 (1995) 1261–1269.
- [8] E. Mezaache, M. Daguenet, Étude numérique de l'influence de l'inclinaison sur l'évaporation d'un film liquide s'écoulant sur une paroi plane isotherme ou à flux de chaleur imposé, *Canad. J. Chem. Engrg.* 76 (1998) 203–210.
- [9] E. Mezaache, M. Daguenet, Étude numérique de l'évaporation dans un courant d'air humide laminaire d'un film d'eau ruisselant sur une plaque inclinée, *Internat. J. Therm. Sci.* 39 (2000) 117–129.
- [10] A. Acrivos, M.J. Shah, E.E. Petersen, Momentum and heat transfer in laminar boundary-layer flows of non-Newtonian fluids past external surfaces, *AIChE J.* 6 (1960) 312–317.
- [11] S.Y. Lee, W.F. Ames, Similarity solutions for non-Newtonian fluids, *AIChE J.* 12 (1966) 700–708.
- [12] C.C. Hsu, A simple solution for boundary-layer flow of power law fluids past a semi-infinite flat plate, *AIChE J.* 15 (1969) 367–370.
- [13] A.H.P. Skelland, *Non-Newtonian Flow and Heat Transfer*, Wiley, New York, 1967.
- [14] E.R.G. Eckert, R.M. Drake, *Analysis of Heat and Mass Transfer*, McGraw-Hill, New York, 1972.
- [15] J.M. Delhayé, Conditions d'interface et sources d'entropie dans les systèmes diphasiques, *Rapport CEA-R-4562*, 1974.
- [16] V. Narayananurthy, P.K. Sarma, Dynamics of developing laminar non-Newtonian falling liquid films with free surface, *J. Appl. Mech.* 45 (1978) 19–24.
- [17] A. Agunaoun, Étude de l'évaporation et du transfert de chaleur d'un film liquide mince en mouvement sur une paroi en présence d'un écoulement extérieur forcé, Thèse de Doctorat, Université de Perpignan, France, 1994.
- [18] A. Asbik, Étude en régime laminaire de la condensation dans un échangeur thermique diphasique à tubes horizontaux, Thèse de Doctorat, Université de Perpignan, France, 1993.